**Teoria tratta dagli appunti del corso 2016/2017 possono contenere errori o pezzi mancanti rispetto al corso attuale, da usare come base per ripassare o altro, consigliato studiare sul libro**

**Sistemi Lineari**

Un sistema lineare di **m** equazioni ed **n** incognite è:

In un sistema lineare si considerano contemporaneamente m equazioni lineari (polinomi di grado 1) in n incognite.

**DEF.**

Sia **sigma** un sistema lineare di m equazioni ed n incognite. Una soluzione di sigma è una n-pla ordinata di numeri s1,-,s2 tali che se sostituiti ordinatamente alle incognite x1,-,x2 si ottengono tutte uguaglianze vere.

Sia S l’insieme delle soluzioni di sigma allora sigma è compatibile se ; è incompatibile o impossibile se.

Ogni sistema omogeneo ammette almeno la soluzione (0,…,0) che viene detta soluzione banale.

Se due sistemi Σ1 e Σ1 hanno lo stesso insieme delle soluzioni, allora sono detti **equivalenti**.

**DEF.**

Sigma sistema lineare con m equazioni, n incognite, se → Σ è omogeneo

Se Σ non è omogeneo allora Σ0 ottenuto a partire da Σ ponendo uguali a 0 i termini noti, è detto **sistema** **lineare omogeneo** associato a sigma.

Se Σ è omogeneo allora perché la soluzione banale

**DEF.**

Σ sistema lineare, la “tabella” è detta **matrice dei coefficienti del**

**sistema Σ** **o matrice incompleta**

è la **matrice colonna dei termini noti** (a destra dell’uguale).

è detta la **matrice** **completa** o **orlata**.

**Matrici**

Una matrice è un insieme i cui elementi hanno un duplice ordinamento.

Una matrice di m righe ed n colonne è:

con **m riga** ed **n colonna**

(a**ij**) **i** indice di riga e **j** indice di colonna i = 1, … ,m | j = 1, … ,m

L’insieme delle matrici reali m x n è Mm,n (**ℝ**)

Le matrici m x 1 sono dette **matrici** **colonna**

Le matrici 1 x n sono dette **matrici** **riga**

Se m = n la matrice A è detta **matrice quadrata di ordine n**

L’insieme delle matrici quadrate di ordine n è Mn (**ℝ**)

**SOLO PER MATRICI QUADRATE**

diagonale **principale** diagonale **secondaria**

Dato :

se aiy = 0 i > y → A è **triangolare superiore**

Le matrici triangolari superiori sono matrici quadrate che hanno nulli tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale

se aiy = 0 i y → A è **strettamente triangolare superiore**

se aiy = 0 i < y → A è **triangolare inferiore**

Le matrici triangolari inferiori sono matrici quadrate che hanno nulli tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale

se aiy = 0 i y → A è **strettamente triangolare inferiore**

se aiy = 0 i y → A è **diagonale**

Una matrice diagonale è una matrice quadrata in cui solamente i valori della diagonale principale possono essere diversi da 0.

corrisponde alla **matrice** **identità**

**Eliminazione di Gauss-Jordan**

Operazioni ammissibili (per riga):

1. Scambiare due righe tra loro.
2. Moltiplicare una riga per un numero reale non nullo
3. Sommare ad una riga un’altra riga.
4. Sommare ad una riga un multiplo reale di un’altra riga

Se ottengo una matrice da M usando operazioni ammissibili, diremo che .

Se e sono matrici complete di due sistemi lineari e e se e sono equivalenti.

**DEF.**

Una riga è detta nulla se ogni elemento è uguale a 0

Il primo elemento (da sinistra) non nullo di una riga non nulla è detta **PIVOT**.

Una matrice è in **forma a scalini** (o **gradini**) per righe se soddisfa le seguenti due condizioni:

1. Tutte le righe nulle sono sotto quelle non nulle.
2. Il PIVOT di una riga non nulla si trova in una colonna a destra di tutte le colonne contenenti i PIVOT delle righe sovrastanti.

Una matrice è in **forma a scalini ridotta** se:

1. È in forma a scalini.
2. Ogni PIVOT è uguale a 1 ed è l’unico elemento non nullo della sua colonna.

Data una matrice matrice equivalente ad (secondo Gauss) tale che è in forma a scalini ridotta.

1) Quando si ha un PIVOT su ogni colonna delle incognite e non si hanno PIVOT nella colonna dei termini noti allora il **sistema lineare ha un’unica soluzione.**

2) Se si ha un PIVOT nella colonna dei termini noti allora il **sistema lineare non ha soluzioni**.

3) Se non si ha un PIVOT nella colonna dei termini noti e se almeno una colonna delle incognite non ha PIVOT allora il sistema lineare ha **infinite** **soluzioni**, che non vuol dire che tutte le n-ple sono soluzioni.

**DEF.**

Se un sistema lineare ha **un’unica soluzione** si dice **determinata**, se ne ha **infinite** si dice **indeterminata**.

Posso togliere o aggiungere identità (0 = 0) a un sistema ottenendone uno equivalente.

**Operazioni Tra Matrici**

**Somma di matrici**:

A, B Mm,n (**ℝ**) A = aij , B = bij A+B = (aij + bij) Mm,n (**ℝ**)

**Proprietà**:

1. A + (B+C) = (A+B) + C; A,B,C Mm,n (**ℝ**) ASSOCIATIVA
2. O Mm,n (**ℝ**) | A + O = O +A = A; A Mm,n (**ℝ**) ( elemento neutro)

Con O = matrice di tutti zeri

1. A Mm,n (**ℝ**) A Mn (**ℝ**); A + (-A) = (-A) + A = 0 ( elemento opposto)

Se A = (aij) -A = (-aij)

1. A + B = B + A; A,B Mm,n (**ℝ**) Proprietà Commutativa

**Prodotto di una matrice per uno scalare:**

A Mm,n (**ℝ**) , **ℝ** A = aij   A = ( aij) Mm,n (**ℝ**)

**Proprietà**:

1. A + B) = A + B ; **ℝ ;**  A,B Mm,n (**ℝ**) Somma di Matrici
2. ( + B) A = A + B ; **ℝ ;**  A,B Mm,n (**ℝ**) Somma di Scalari
3. (B) A = (BA) ; **ℝ ;**  A Mm,n (**ℝ**)
4. 1A = A; A Mm,n (**ℝ**)
5. OA = O**m,n** = Om,n ; **ℝ ;**  A Mm,n (**ℝ**)
6. (-1)A = -A; A Mm,n (**ℝ**)

Le proprietà da 1 a 8 implicano che l’insieme delle matrici Mm,n (**ℝ**) è uno spazio vettoriale reale.

Le proprietà 9,10 seguono le altre.

Sia A Mm,n (**ℝ**) → la **trasposta** di A è At (si invertono righe – colonne)

**Proprietà**:

1. (A + B)t = At + Bt ; A,B Mm,n (**ℝ**)
2. (A)t = (A)t ;  **ℝ ;**  A Mm,n (**ℝ**)
3. (At)t = A ; A Mm,n (**ℝ**)

**DEF.**

A è **simmetrica** se At = A

A è **antisimmetrica** se At = - A

Si noti che ogni matrice antisimmetrica ha necessariamente nulli gli elementi della diagonale principale

**Prodotto di matrici:**

A Mm,n (**ℝ**) , B Mp,q (**ℝ**) AB ⬄ n = p A = a**ij** , B = b**jk**

C = AB Mm,q (**ℝ**)

C = c**ik** = = *a****i1****b****1k*** *+ … + a****in****b****nk***

In generale **non** è commutativo

Am,n On,k = Om,k ; A Mm,n (**ℝ**)

Om,n An,k = Om,k ; A Mn,k (**ℝ**)

In generale:

Am,n Bn,k = Om,k → Am,n = Om,n  V Bm,k = On,k

**Proprietà**:

1. A(BC) = (AB)C; A Mm,n (**ℝ**); B Mm,p (**ℝ**); C Mm,p (**ℝ**)
2. A(B+C) = AB + AC A Mm,n (**ℝ**); B,C Mn,p (**ℝ**)
3. (A+B)C = AC + BC A,B Mm,n (**ℝ**); B,C Mn,p (**ℝ**)
4. (A) B = A(B) = (AB) ; **ℝ ;**  A Mm,n (**ℝ**); B Mm,p (**ℝ**)
5. (AB)t = Bt At ; A Mm,n (**ℝ**); B Mm,p (**ℝ**)
6. AIn = InA = A A Mm,n (**ℝ**)

**DEF.**

Una matrice del tipo In è detta matrice scalare.

Le matrici scalari commutando con ogni matrice: InA = A(In)

**Potenze di matrici:**

A Mn (**ℝ**); A0 = In; Ak = ; k volte con

**DEF.**

Data una matrice, prendono il nome di***sottomatrici***quelle matrici ottenute eliminando alcune righe e/o colonne della matrice in esame, mentre si dicono ***minori*** ***associati*** a una matrice i determinanti delle sottomatrici quadrate da essa estratte.

La **sottomatrice complementare** Aij di aij è la sottomatrice complementare ottenuta eliminando la riga i e la colonna j.

Sia A una matrice quadrata di ordine n ≥ 2, si dice ***minore complementare*** il determinante di una sottomatrice estratta da A eliminando una sola riga e una sola colonna

**DEF.**

Un **minore** di **ordine** k è il determinante di una sottomatrice quadrata ottenuta intersecando k righe e k colonne della matrice A.

Se A Mn (**ℝ**):

Il **cofattore** (o complemento algebrico) di aij è **(-1) i+j det(Aij);** i segni dei cofattori hanno struttura:

e cosi via

Ovvero segno + se i + j è **pari**, segno – se i + j è **dispari**

**Proposizione**

Se esiste la **matrice inversa** di A Mn (**ℝ**) allora è unica.

Se A Mn (**ℝ**) è invertibile indico l’inversa con A-1. Quindi se A-1 è tale che A A-1 =A-1 A = In

Si ricordi che una matrice quadrata è invertibile ⬄ det(A) ≠ 0

Se A = , l’inversa

**Osservazione**:

Una matrice quadrata di ordine n è invertibile ⬄ ha rango n

**Teorema**

Se A GLn(**ℝ**) → A-1 = (cof(A))t matrice dei cofattori

**Proprietà**:

L’insieme delle matrici invertibili di ordine n è indicato con GLn(**ℝ**) **(gruppo lineare generico**)

**Proposizione**:

1. Se A GLn(**ℝ**) → A-1 GLn(**ℝ**) e (A-1) -1 = A
2. Se A GLn(**ℝ**) → At  GLn(**ℝ**) e (At )-1 = (A-1) t
3. Se A, B GLn(**ℝ**) → AB GLn(**ℝ**) e (AB)-1 = B-1 A-1

**Dimostrazione**:

1. A-1 GLn(**ℝ**) ⬄ B | A-1 B = B A-1 = I se B = A → A-1 A = A A-1
2. At GLn(**ℝ**) ⬄ B | At B = B At = I

Poiché A è invertibile allora traspongo ambo i membri →

=

1. AB GLn(**ℝ**) ⬄ C | (AB)C = C(AB) = I

Se C = → (AB) () = AB = AI = I

Se (AB = AB = = c.v.d

Quindi:

**DEF.**

A GLn(**ℝ**); A è detta **ortogonale** se = cioè se A = A = I

L’insieme delle matrici ortogonali nxn si indica con **O(n)** GLn(**ℝ**)

**Traccia**

A Mn (**ℝ**)

Si definisce **traccia** tr(A) di una matrice A la somma di tutti gli elementi sulla sua diagonale principale.

tr(A) =

**Proprietà:**

1. tr(A) = tr(A) **ℝ ;**  A Mn (**ℝ**)
2. tr(A+B) = tr(A) + tr(B) A,B Mn (**ℝ**)
3. tr(At) = tr(A) A Mn (**ℝ**)
4. tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB) A,B,C Mn (**ℝ**)

tr(ABC) tr(BAC)

tr(AB) = tr(BA)

**Determinante**

A Mn (**ℝ**)

Il **determinante** di A è:

Se n = 1 → det(a11) = a11

Se n > 1 → [se fisso la colonna j (sviluppo di Laplace)]

det(A) = (sviluppo lungo la colonna j)

Data una matrice 2x2: , il determinante è uguale a: **(a ⋅ d) – (b ⋅ c)**

**Regola di Sarrus (3x3)**

→ det(A) = (aei) + (bfg) + (cdh) - (ceg) - (afh) – (bdi)

+ = a b c a b - = a b c a b

d e f d e d e f d e

g h i g h g h i g h

**Proprietà:**

1. det (At) = det(A); A Mn (**ℝ**)
2. se A è una triangolare superiore o inferiore o diagonale → det(A) =

(prodotto degli elementi sulla diagonale principale)

1. Se ottengo B a partire da A scambiando due righe (o colonne) tra loro → det(B) = - det(A)
2. Se ottengo B a partire da A moltiplicando per uno scalare **ℝ** una colonna (o riga) allora det(B) = det(A)

det( A) = n det(A); A Mn (**ℝ**)

1. Se A ha una riga (o una colonna) con tutti gli elementi uguali a zero oppure ha due righe

(o colonne) uguali o proporzionali → det(A) = 0

1. Se ottengo B a partire da A sommando a una riga (o colonna) un multiplo reale di un’altra riga

(o colonna) → det(B) = det(A)

1. det(AB) = det(A) det(B); A,B Mn (**ℝ**) **teorema di BINET**
2. det() = ; A GLn(**ℝ**)

**DEF.**

A Mn (**ℝ**)

I = {1,2,3,…,m}

J = {1,2,3,…,n}

Una sottomatrice di A è Ahk = (aij) con

**RANGO**

A Mn (**ℝ**)

Il **rango** di A, indicato con rg(A) o rk(A) è l’ordine del minore non nullo con ordine più grande.

; A Mn (**ℝ**)

rg(A) = 0 ⬄ A = Om,n

**DEF.**

Se il rg(A) = min(m,n) si dice che A ha rango massimo ( o pieno)

rg(At) = rg(A); A Mm,n (**ℝ**)

1. Se tutti i minori di ordine K sono uguali a 0 allora sono uguali a 0 anche tutti i minori di ordine q > k
2. Se b 0 è un minore di ordine k corrispondente alla sottomatrice quadrata B di A e se sono uguali a zero tutti i minori di ordine k+1 corrispondenti a sottomatrici di A aventi B come sottomatrice allora sono uguali a zero tutti i minori di ordine k+1 di A (anche quelli non aventi B come sottomatrice della loro sottomatrice corrispondente e rg(A) = K **teorema di KRONECKER o degli orlati**

**Teorema**

A Mn (**ℝ**), B matrice a scalini

Tale che B ~ A allora rg(A) = rg(B) = numero di PIVOT (cioè uguale al numero di righe non nulle)

**Teorema di ROUCHE-CAPELLI**

Dato un sistema di m equazioni e n incognite

Con Am,n = → A/Bm,n+1 =

ha soluzione ⬄ rg(A) = rg(A/B) = r; In tal caso ∑ ha ∞n-r soluzioni.

**Osservazione**:

In generale poiché A sottomatrice di A/B

Se il () ⬄ rg(A) < rg(A/B) → ∑ non ha soluzioni

Se si pone ∞0 = 1, quindi se n = r → ∑ ha un’unica soluzione

Se n > r e k = n – r > 0 → ∞k significa che ∑ ha infinite soluzioni che dipendono da k parametri

**Osservazione:**

Il teorema di Rouche-Capelli serve solo per contare le soluzioni di un sistema lineare, non serve per trovarle.

**Teorema di CRAMER**

Dato un sistema lineare di n equazioni e min c.

Am,n = ; Bn,1 = ; Xn,1 = → ∑ : AX = B

∑ ha un’unica soluzione ⬄ det(A) ≠ 0; In tal caso X = A-1 B oppure ; i = i,…,n

Dove Ci =

^

colonna i

Ci è ottenuta a partire da A sostituendo la colonna i con la colonna dei termini noti

**Osservazione**:

Se il sistema lineare non è quadrato, posso ricondurmi a un sistema lineare quadrato nel seguente modo:

Se rg(A) = rg(A/B) = r e sia M sottomatrice di A di ordine r tale che det(M) ≠ 0 → posso eliminare le equazioni corrispondenti alle righe di A che non sono presenti in M (**equazioni ridondanti**) ottenendo un sistema lineare equivalente.

Inoltre, posso considerare parametri le incognite corrispondenti alle colonne di A non presenti in M e queste possono essere considerate “termini noti”.

**Osservazione**:

Esistono più scelte corrette per i parametri, ma non sempre sono tutte corrette.

**Teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare**

Sia ∑: AX = B un Sistema lineare e sia **S** l’insieme delle soluzioni di ∑

S = Sol ( ∑ )

Con Am,n = ; Bn,1 = ; Xn,1 =

Il sistema lineare omogeneo associato a ∑ è S0 = Sol( ∑0 )

Sia inoltre Xn,1 = , quindi supponiamo S ≠ 0 → l’insieme

S0 = soluzione generale del sistema omogeneo associato

= soluzione particolare del sistema non omogeneo

Con = { ; }

**INSIEMI**

Un **insieme** è una “**collezione** o **famiglia**” di “**oggetti**” detti elementi dell’insieme.

P = {insieme dei numeri pari (proprietà che descrive gli elementi dell’insieme}

**DEF.**

Data una relazione binaria R in un insieme X, essa si dice di **equivalenza** se è riflessiva, simmetrica e transitiva.

**Riflessiva** se

**Simmetrica** se

**Transitiva** se a è in relazione con b e b è in relazione con c, allora a è in relazione con c

**DEF.**

L’insieme vuoto è l’insieme senza elementi ∅ = {} ∅ ≠ {0}

**DEF.**

Il numero di elementi di un insieme X è detto **cardinalità** dell’insieme e si indica con #X = |X|

**DEF.**

Se un insieme ha un numero finito di elementi si dice insieme finito altrimenti si dice insieme infinito.

**DEF.**

A, B insieme

A è **sottoinsieme** di B (o contenuto in B) se e si indica con

A è strettamente contenuto in B se:

1. e si indica con A ⊆ B

**Osservazione**:

∅ insieme

A = B ⬄

**DEF.**

A,B insiemi

**Intersezione** = A ∩ B = { x | x ∈ A x ∈ B }

**Unione** = A ∪ B = { x | x ∈ A ∨ x ∈ B }

**Differenza** = A \ B = { x | x ∈ A x ∉ B }

**DEF.**

A,B insiemi;

Il **complementare** di A rispetto a B è l’insieme: = = B \ A

**DEF.**

A, B insiemi

Il **prodotto cartesiano** di A ∈ B è l’insieme: AxB = { (x;y) | x ∈ A; y ∈ B } (x;y) coppie ordinate

In altri termini, il prodotto cartesiano di due insiemi è l’insieme di tutte le possibili coppie ordinate di elementi dei due insiemi.

**Funzioni**

**DEF.**

x,y insiemi

Una **funzione** f da x a y è una relazione (x,y,) tale che ogni elemento di x è in relazione esattamente con un elemento di y.

La funzione f si indica con f:

x è detto **dominio** di f dom(f)

y è detto **codominio** di f codom(f)

⊂ X,Y è il grafico di f (prodotto cartesiano)

Se x ∈ X f(x) indica l’unico elemento di y tale che x ~ f(x) cioè:

y ≠ f(x)

**DEF.**

Una **funzione lineare**, o più precisamente funzione lineare affine, è una funzione definita mediante un polinomio di grado 1 e il cui grafico coincide con una retta.

f è **lineare** se:



**DEF.**

**Ker(f):**

Il **ker** viene anche detto **nucleo** di un’applicazione lineare ed è un particolare sottoinsieme del dominio dell’applicazione, formato da tutti e solo i vettori del dominio che hanno come immagine lo zero del codominio.

Ker(f) =

f(v) = 0

che risolvono l’equazione sono il Ker(f)

Im(f) è il codominio

dim Ker(f) + dim Im(f) = dim V

**DEF.**

f:

f(x) è **immagine** di x ; Im(f) = ∪ {f(x)} (x ∈ X)

**L’immagine** di f è Im(f) = { y ∈ Y | x ∈ X | f(x) = y } Y al variare di x ∈ dom(f)

**L’immagine di una funzione** è l’insieme dei valori assunti da una funzione sul proprio dominio, ed è quindi contenuta nell’insieme di arrivo della funzione (il codominio), con il quale può al più coincidere.

**DEF.**

f:

La **controimmagine** di y ∈ Y è: f -1(y) = { x ∈ X | f(x) = y } X

Se B ⊂ Y f -1(B) = ∪ y ∈ B f -1(y) = { x ∈ X | f(x) ∈ B }

Se A ⊂ X f(A) = ∪ x ∈ A {f(x)} = { y ∈ Y | x ∈ A | f(x) = y }

La **controimmagine** di un insieme del codominio, mediante una funzione, è l’insieme degli elementi del dominio che vengono mandati nel codominio dalla funzione.

**DEF.**

f: ^ g:

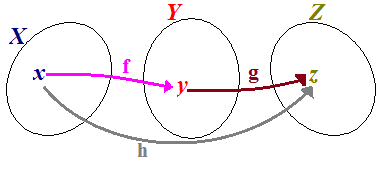
La **funzione** **composta** è:

h = g *o*  f :

La **funzione composta** è una funzione che si ottiene mediante l’operazione di composizione di due funzioni. In sintesi, si definisce applicando la seconda funzione alle immagini della prima.

**Osservazione**:

∃ g *o*  f (g composto f, o g dopo f) ⬄ codom(f) = dom(g), in tal caso:



**Osservazione**:

In generale g *o* f ≠ f *o*  g

**Proprietà**:

h *o* (g *o*  f) = (h *o* g) *o*  f; f: X Y; g: Y Z; h: Z V;

Cioè la composizione è associativa e posso scrivere h *o* g *o*  f

**DEF.**

Sia f: X X:

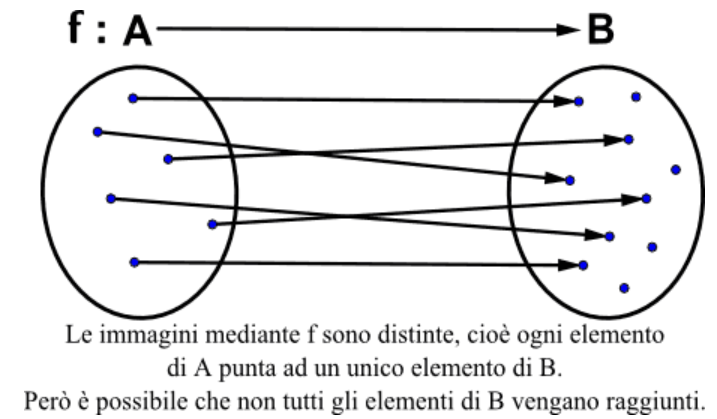
Dove idx :

**DEF.**

f:

f è **iniettiva** se f(x1) ≠ f(x2) ; con x1 ≠ x2 ⬄ f(x1) = f(x2) x1 = x2 ;

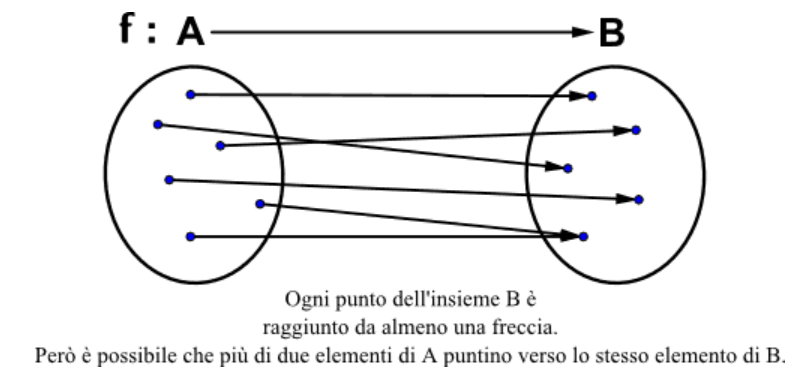
F è iniettiva se a distinti elementi di A corrispondono distinti elementi di B



**DEF.**

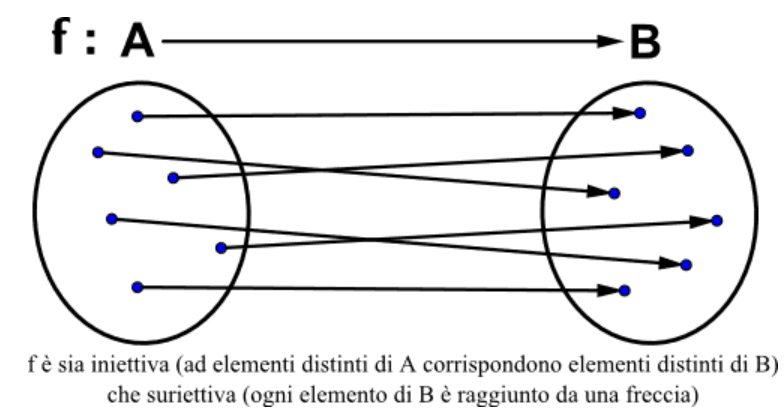
f è **suriettiva** se Im(f) = codom(f) ⬄ x ∈ X | f(x) = y ⬄ #f -1(y) ≥ 1;

Una funzione è suriettiva se ogni elemento del seondo insieme è raggiunto da **almeno** una freccia che parte dal primo insieme



**DEF.**

f è **biettiva** se è sia iniettiva che suriettiva ⬄ #f -1(y) = 1;



**DEF.**

f è **invertibile** se g ∈ Y X | g *o* f = id x ; f *o* g = id y e g è detta **inversa** di f

Una funzione invertibile f è una funzione per la quale è possibile definire una nuova funzione che percorre al contrario la legge di f.

**Osservazione**:

Se g inversa di f è unica e si indica con g = f -1 : y x ∧ f -1 *o* f = id x ∧ f *o* f -1 = id y

dom(f -1) = codom(f)

codom(f -1) = dom(f)

**Teorema**

f : x y; f **biettiva** ⬄ f **invertibile**

**Gruppi**

**DEF.**

Dato X insieme;

Un’operazione binaria intera su X è una funzione:

f:

Se su X è definita un’operazione binaria interna f diciamo che X è chiuso rispetto a f.

**DEF.**

Dato X insieme con un’operazione binaria interna:

⋅ :

X è un **Gruppo** se l’operazione ⋅ verifica:

1. x ⋅ (y ⋅ z) = (x ⋅ y) ⋅ z; **associativa**
2. 1 ∈ X | x ⋅ 1 = 1 ⋅ x = x;  **elemento neutro**
3. |  **elemento inverso**
4. x ⋅ y = y ⋅ x; **commutativa**

x è detto gruppo commutativo o abeliano

**Osservazione**:

Per indicare che X è un gruppo con l’operazione ⋅ si scrive che (x,⋅) è un gruppo

**Osservazione**:

La precedente notazione è detta moltiplicativa; Si può riformulare tutto usando la notazione additiva e in tal caso le precedenti proprietà diventano:

+ :

1. x + (y + z) = (x + y) + z; associativa
2. 0 ∈ X | x + 0 = 0 + x = x; elemento neutro
3. | elemento inverso
4. x + y = y + x; commutativa

**Osservazione**:

Spesso si usa la notazione additiva per i gruppi commutativi.

**Teorema**

Dato (X, ⋅) gruppo

1. L’elemento neutro è unico
2. Dato è unico

**DIMOSTRAZIONE**:

1. Siano 1,*e* ∈ X elementi neutri di X allora:

1 ⋅ x = x ⋅ 1 = x ;

*e* ⋅ x = x ⋅ *e* = x ;

Allora *e* = *e* ⋅ 1 = 1  *e*  = 1

1. Siano elementi inversi di x allora:

x ⋅ = ⋅ x = 1 ;

*x* ⋅ y = y ⋅ *x* = 1 ;

*y* ⋅ x = ⋅ *x* ;

y ⋅ x ⋅ = ⋅ x ⋅ ;

c.v.d

**Osservazione**:

Poiché in un gruppo ∃ elemento neutro ∅ non è mai un gruppo.

Il gruppo più piccolo è {1} oppure {0}; esso è detto gruppo banale.

**Campi**

**DEF.**

Sia X un insieme con due operazioni binarie interne

+ : ⋅ :

(X;+; ⋅) è un **campo** se:

1. x + (y + z) = (x + y) + z;
2. 0 ∈ X | x + 0 = 0 + x = x;
3. |
4. x + y = y + x;
5. x ⋅ (y + z) = x ⋅ y + x ⋅ z;

(x + y) ⋅ z = x ⋅ z + y ⋅ z;

1. x ⋅ (y ⋅ z) = (x ⋅ y) ⋅ z;
2. 1 ∈ X | x ⋅ 1 = 1 ⋅ x = x;
3. |
4. x ⋅ y = y ⋅ x;

**Osservazione**:

(X;+; ⋅) è un campo se:

1. (X;+) gruppo comune
2. (X-{0}; ⋅ ) gruppo comune

Ricordiamo che un gruppo G si dice commutativo o **abeliano** se la sua operazione interna gode della proprietà commutativa.

**Osservazione**:

∅ non è mai un campo.

Il più piccolo campo è {0} dove 0 = 1 campo banale

**DEF.**

Dato (K;+; ⋅) campo

Uno **spazio** **vettoriale** su K campo è un insieme V non vuoto con due operazioni:

+v : ⋅v :

^ ^

Somma di un vettore Prodotto di un vettore per uno scalare

Tali che:

1. =
2. 0v ∈ V | v 0v = 0v v = v;
3. |
4. = ;
5. ⋅v () = ⋅v ⋅v ;
6. ⋅v = ⋅v ⋅v ;
7. ⋅v = ⋅v ⋅v );
8. 1 ⋅v = v;

Gli elementi di V sono detti **vettori** e formano lo spazio dei vettori e gli elementi di K sono detti **scalari**.

Uno spazio vettoriale V su K campo è indicato con (V; +v ; ⋅v ; K ; + ; ⋅ )

**Osservazione**:

Lo spazio vettoriale più piccolo è {0v} ed è detto spazio banale (su K)

**DEF.**

Sia V spazio vettoriale su K, allora V è uno spazio vettoriale **reale**, se K = C (complessi) allora V è spazio vettoriale **complesso**.

**Osservazione**:

Scriviamo:

⋅v =

0v = 0

**Proposizione**:

Dato V spazio vettoriale su K

1. ;

**DEF.**

; =

**ℝn** con le precedenti operazioni è uno spazio vettoriale su **ℝ**

**Osservazione**:

Kn con operazioni analoghe a **ℝn** è uno spazio vettoriale su K

**Osservazione**:

Posso “identificare” **ℝn** con un opportuno insieme di matrici, cioè **ℝn** = M 1,n (**ℝ**) oppure **ℝn** = M n,1 (**ℝ**)

**DEF.**

Sia O un punto del piano per ogni punto P del piano, definisco il **vettore** **geometrico** applicato in O e che termina in P, come il segmento orientato di estremi O e P percorso da O verso P.

L’insieme dei vettori geometrici applicati in O è indicato con Vo2.

**DEF. (regola del parallelogramma)**

+ = con R intersezione della retta parallela a passante per P

Allora definisco R come il simmetrico di O rispetto al punto medio di M di . Ovvero = +

L’elemento neutro è + =

L’elemento opposto è - = con Q simmetrico di P rispetto a O: + ( - ) =

Definisco il prodotto di un vettore per uno scalare:

Sia **;**

= ;

= ;

con Q sulla retta OP tale che = e Q dalla stessa parte di P rispetto a O se .

Q dalla parte opposta di P rispetto a O se ; Q = 0 se = 0.

Vo2 con le precedenti operazioni è uno spazio vettoriale su **;** il discorso analogo vale per lo spazio (tridimensionale).

Vo3 è l’insieme dei vettori geometrici dello spazio (tridimensionale in O ed è uno spazio vettoriale su con le precedenti operazioni)

**DEF.**

deg(a0) = -1

Consideriamo la classica somma di polinomio, è il prodotto di uno scalare per un polinomio

**DEF. La somma**

(f + g) (x) = f(x) + g(x) Somme delle immagini di x

**DEF. Prodotto di una funzione per un numero reale**

(f)(x) = f(x); ;

**C**0() è uno spazio vettoriale su

**DEF.**

A insieme, I insieme di indici

Una **partizione** di A è un insieme di sottoinsiemi non vuoti di A.

Ai ≠ 0 ⊂ A; i ∈I, tali che:

1. Ui∈I Ai = A
2. Ai ∩ Aj = ∅; con i ≠ y

**Esempio**:

R = “Sono in relazione numeri che hanno lo stesso resto rispetto alla divisione per 2”

Quindi tutti i numeri reali sono in relazione tra loro. Nessun pari è in relazione con un dispari ne viceversa.

R è una **relazione di equivalenza** (è riflessiva, simmetrica, transitiva)

Quindi A0 = { n = 2k; k ∈ Z} contiene tutti elementi in relazione tra loro e nessun elemento di A0 è in relazione con qualche elemento di A1 né viceversa.

A0, A1 è una partizione di Z

**Osservazione**:

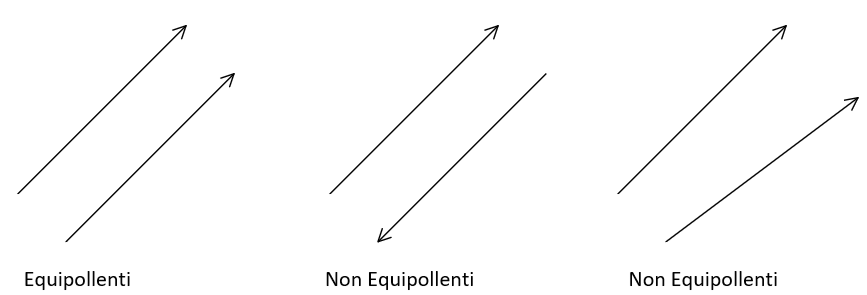
A insieme, R relazione di equivalenza su A i sottoinsiemi di A di tutti gli elementi in relazione tra loro e non in relazione con gli elementi degli altri sottoinsiemi formano una partizione di A e questa partizione è unica.

**DEF.**

A insieme, R relazione di equivalenza su A.

L’insieme quoziente A/~ è l’insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di A individuati da R che formano una partizione di A, tali sottoinsiemi sono detti classi di equivalenza di R.

Due vettori si dicono **equipollenti** se hanno la stessa **direzione**, la stessa **lunghezza** e lo stesso **verso,** cioè se giacciono su rette parallele (eventualmente coincidenti) e se muovendo una delle due rette parallelamente a sé stessa, è possibile portare i due segmenti a sovrapporsi in modo che i loro punti iniziali e i loro punti finali coincidano.



Un vettore geometrico è per definizione una classe di equipollenza di vettori applicati.

Il vettore nullo ha lunghezza nulla, direzione e verso indeterminati e si denota con 0.

**DEF. Una relazione d’equivalenza su Va2**

~

^

Equipollente

1. Hanno orientazione concorde

L’insieme quoziente: V2 = Va2/~ è l’insieme dei **vettori geometrici liberi del** piano, cioè un vettore geometrico libero è la classe di equivalenza di un vettore applicato e è un rappresentante della classe d’equivalenza [ ].

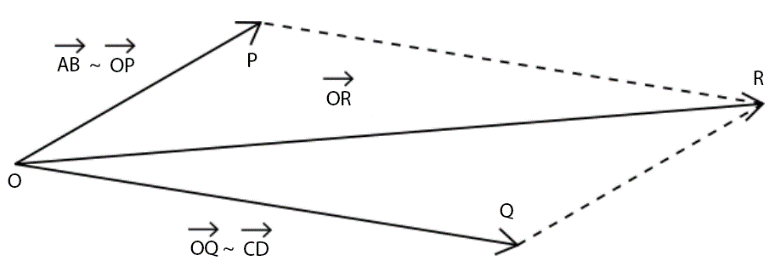
Posso sempre scegliere un rappresentante applicato in O.

[ ] = [ ] == ~

**DEF. La somma**

L’operazione di somma di due vettori è associativa [

[ ] + [] = [ + ] = []



**DEF. Il prodotto di un vettore per uno scalare**

[] = ;

Il risultato è un vettore che ha la stessa direzione, lunghezza uguale moltiplicata per e verso discorde o concorde a seconda se sia positivo o negativo, del vettore precedente.

Le operazioni date sono ben definite, cioè non dipendono dal rappresentante scelto.

Quindi V2 è uno spazio vettoriale su con le precedenti operazioni.

**Osservazione**:

Vale il discorso analogo per Va2 e V3 = Va3/~

**DEF.**

A, B ∈ Mn (**ℝ**)

A ~ B ⬄ ∃ M ∈ GLn (**ℝ**) | MAM-1 = B

In tal caso A e B sono dette **matrici simili**

Due matrici quadrate A e B sono **simili** se e solo se esiste una matrice invertibile M tale che il prodotto tra l’inversa di M e le matrici B e M coincide con la matrice A.

**Osservazione**:

La similitudine di matrici è una relazione l’equivalenza, infatti:

1. I A I-1 = A A ~ A
2. A ~ B ⬄ MAM-1 = B | M-1 B(M-1)-1 = M(MAM-1)M = (M-1M)A(M-1M) = I A I = A B ~ A
3. A ~ B ⬄ MAM-1 = B ∧ B ~ C ⬄ NBN-1 = C | (NM)A(NM)-1 = NMAM-1 N-1 = NBN-1 = C

A ~ C

**Proprietà**:

A,B ∈ Mn (**ℝ**)

Se A ~ B det(A) = det(B) ∨ tr(A) = tr(B)

Determinante e traccia sono invarianti per similitudine.

**DIMOSTRAZIONE determinante:**

tr(B) = tr(MAM-1) = tr(AM-1M) = det(M) det(A) det(M-1) = det(M) det(A) = det(A)

**DIMOSTRAZIONE traccia:**

tr(B) = tr(MAM-1) = tr(AM-1M) = tr(AI) = tr(A) c.v.d.

**Osservazione**:

A,B ∈ Mn (**ℝ**)

Se det(A) = det(B) e tr(A) = tr(B) non è detto che A ~ B;

Quindi non posso definire un prodotto tra le classi di equivalenza usando il prodotto di rappresentanti.

**Proposizione**:

V spazio vettoriale su campo K e W ⊂ V è **sottospazio** di V se:

1. ;
2. w ∈ W; ;

Quindi se W sottospazio di V, allora:

;

**DIMOSTRAZIONE:**

Le proprietà 1,4,5,6,7,8 valgono in tutto V quindi anche in W

0 = 0 w ∈ W

^ ^ ^ ^

V K W Per la seconda proprietà

-w = (-1) w ∈ W

^ ^ ^

V K W c.v.d

**Osservazione**:

Se 0 ∈ W non implica che W sia un sottospazio ma che W ≠ 0

Se 0 ∉ W W non è sottospazio

**Osservazione**:

∑ : AX= B sistema lineare

0 ∈ Sol( ∑ ) ⬄ A ⋅ O = B ⬄ O = B ⬄ ∑ è omogeneo

Quindi Sol( ∑ ) è un sottospazio vettoriale di **ℝ**n ⬄∑ è omogeneo

**DEF.**

V spazio vettoriale su K

U,W sottospazio di V

La somma di U e W è l’insieme U + W = {u + w, u ∈ U; v ∈ W} ⊂ V

**Osservazione**:

Più in generale, l’intersezione di una famiglia qualsiasi di sottospazi vettoriali di V è un sottospazio vettoriale di V.

L’unione di due sottospazi non è in generale un sottospazio di V.

**Osservazione**:

U ⊂ U + W; infatti u = u + 0 ∈ U + W

W ⊂ U + W; infatti w = 0 + w ∈ U + W

**Osservazione**:

U + W è il più piccolo sottospazio di V che contiene U e W. Cioè ∀ sottospazio T di V | U ⊂ T, W ⊂ T V + W ⊂ T

**DEF.**

V spazio vettoriale su K; U,W sottospazio di V

Se U ∩ W = {0} U + W è detta **somma** **diretta** e si indica con **U ⊕ W** e i due sottospazi si dicono **supplementari** di V

**DEF.**

V spazio vettoriale su K campo; ∀ v1,…,vm ∈ V; ∀ ∈ K

La combinazione lineare dei vettori v1,…,vm con coefficienti gli scalari è il vettore :

v = v1 + v2 ,…,vm = ∈ V

Se = 0 si ha v = 0 v1 + 0 v2 + … + 0 vm = 0 e tale combinazione lineare è detta **combinazione lineare banale**

Una **combinazione lineare** dunque altro non è che un’espressione in cui compaiono somme di vettori e moltiplicazioni di vettori per scalari, dove con **vettori** si intendono elementi dello spazio vettoriale V

**DEF.**

V spazio vettoriale su K campo; v1,…,vm ∈ V;

L’insieme di tutte le combinazioni lineari di vettori v1,…,vm è indicato con :

spam k = { v1,…,vm } = L k { v1,…,vm } = { v1 + v2 +…+vm; ∀ ∈ K } ⊂ V

**Osservazione**:

V spazio vettoriale su K; v1,…,vm ∈ V;

L k { v1,…,vm } è un sottospazio di V ed è il più piccolo sottospazio contente i vettori v1,…,vm

**DEF.**

V spazio vettoriale su K campo; v1,…,vm ∈ V;

v1,…,vm sono **linearmente dipendenti** se esistono ∈ K non tutti nulli tali che:

v1 +… +vm = 0 (vettore di zeri) altrimenti v1,…,vm sono **linearmente indipendenti** ( cioè se l’unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è la combinazione lineare banale.

**Proposizione**:

1. V spazio vettoriale su K;
2. Un singolo vettore v ∈ V è linearmente dipendente ⬄ v = 0
3. v1,…,vm ∈ V sono **linearmente dipendenti** ⬄ almeno uno di essi lo posso ottenere da una combinazione lineare degli altri.
4. Due vettori non nulli sono **linearmente dipendenti** ⬄ uno è multiplo dell’altro.

**DIMOSTRAZIONE**:

1. v linearmente dipendente ⬄ , ma se ≠ 0 = 0 ⬄v = 0
2. v1,…,vm linearmente dipendenti ∃ ∈ K non tutti nulli | v1 +… +vm = 0.

Supponiamo ≠ 0

=

con ∧ =

= 0

Con ∧ ∧ , … , = -

**Osservazione**:

V spazio vettoriale su K

1. Se v1,…,vm ∈ V sono linearmente **dipendenti** v1,…,vm,vm+1 ∈ V anche sono linearmente dipendenti.
2. Se v1,…,vm ∈ V sono linearmente **indipendenti** anche v1,…,vm,vm-1 sono linearmente indipendenti.

**DEF.**

A Mm,n (**ℝ**)

Il rango di { v1,…,vm } è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti appartenenti ai vettori { v1,…,vm }.

Il **rango per righe** di A è il massimo numero di righe lineari indipendenti se considerate come vettori di **ℝ**n.

Il **rango per colonne** di A è il massimo numero di colonne lineari indipendenti se considerate come vettori di **ℝ**n.

**Teorema**

A Mm,n (**ℝ**) rango per righe di A = rango per colonne di A = rg(A)

**Osservazione**:

Dato A Mm,n (**ℝ**):

Se B Mm,n (**ℝ**) è ottenuta da A mediante una successione di operazioni elementari sulle righe, allora rg(A) = rg(B)

**Osservazione**:

W = L k = { v1,…, vm }; ∀ v1,…,vm ∈ V; W è sottospazio di V

0 = 0 v1 + … + 0 vm ∈ W ≠ 0

w1, wm ∈ W

w1 + wm = () + () = (+ ) + ( + ∈ W

= () = ( + … + ( ∈ W

Quindi W sottospazio di V

**DEF.**

V spazio vettoriale su K;

*v1,…,vm* generano ( o sono **generatori** di ) V

se ∀ v ∈ V ∃ ∈ K | = v; cioè se L k { v1,…,vm } = V

è sempre vero che L k { v1,…,vm } ⊂ V

Ovvero, diciamo che un insieme di vettori *v1,…,vm* è un sistema di generatori di V se ogni elemento di V si può esprimere mediante una combinazione lineare di tali vettori.

Dunque, un sistema di **generatori** di uno spazio (o di un sottospazio vettoriale) è un insieme di vettori che permette di ricostruire, mediante combinazioni lineari, tutti i vettori dello spazio.

**Osservazione**:

v1,…,vm generano sempre L k { v1,…,vm }

**DEF.**

V spazio vettoriale su K; v1,…,vm ∈ V

Un sottoinsieme finito { v1,…,vm } di V è una **base** di V se:

1. v1,…,vm generano V
2. v1,…,vm sono linearmente indipendenti

Ovvero, una **base** di uno spazio vettoriale è un sistema di generatori linearmente indipendenti che generano l’intero spazio vettoriale.

I coefficienti della combinazione lineare si dicono le **coordinate di v rispetto alla base**

Quindi, una volta assegnata una base, ad ogni vettore della base viene univocamente associata una

n-upla di coordinate.

**Osservazione**:

Una base è un insieme minimale di generatori.

Se vm+1 ∈ L k { v1,…,vm } L k { v1,…,vm,vm+1 } = L k { v1,…,vm }

Se vm+1 ∉ L k { v1,…,vm } L k { v1,…,vm } ⊆ L k { v1,…,vm,vm+1 }

**Osservazione**:

Lo spazio banale V = {0} non ha basi poiché non ha vettore linearmente indipendente

**Osservazione**:

Se K campo con infiniti elementi, allora ogni spazio vettoriale non banale su K ha infinite basi

**Teorema**

V spazio vettoriale su K; v1,…,vm ∈ V basi di V

∀ v ∈ V ∃!  ∈ K | = v

**Teorema Della Dimensione**

V spazio vettoriale su K; B base di V; #B = n ∈ Z ≥ 0 (cioè B ha n elementi)

diciamo che V ha **dimensione** n su K e si scrive dim k (V) = n

Ovvero, la **dimensione** di uno spazio vettoriale è la cardinalità di una sua qualsiasi base

**Osservazione**:

Lo spazio banale ha dimensione uguale a zero dim k ({0}) = 0 ed è **l’unico spazio vettoriale con dimensione nulla.**

**Proposizione**:

V spazio vettoriale su K di Mn

1. Ogni insieme di m vettori con m > n è un insieme di vettori linearmente dipendenti
2. Ogni insieme di n vettori lineari indipendenti è una base di V
3. Ogni insieme di n vettori che generano V è una base di V

**Proposizione**:

V spazio vettoriale su K di dimensione finita; W sottospazio di V

1. dim k (W) ≤ dim k (V) ogni sottospazio vettoriale ha dimensione finita non superiore a n
2. dim k (W) = dim k (V) ⬄ W = V

**DEF.**

V spazio vettoriale su K di dimensione finita; W sottospazio di V

La **codimensione** di W è: codom k (W) = dim k (V) - dim k (W)

In parole povere, la **codimensione** di un sottospazio non è altro che la differenza tra la dimensione dello spazio vettoriale e la dimensione del sottospazio.

**Teorema Formula di Grassmann**

V spazio vettoriale di dimensione finita su K; U, W sottospazio di V

dim k (U + W) = dim k (U) + dim k (W) - dim k (U ∩ W)

In particolare, U + W è somma diretta di U e V , quindi se

dim k (U ∩ W) = 0

**Equazioni Parametriche e Equazioni Cartesiane (VEDERE SUGLI ESERCIZI)**

La dimensione è uguale al numero di parametri (quando si parte da una base)

**Osservazione**:

∃ infinite equazioni cartesiane e infinite equazioni parametriche dello stesso spazio vettoriale

∃ infinite equazioni cartesiane e infinite equazioni parametriche che rappresentano lo stesso sottospazio

**Proposizione**:

V spazio vettoriale di dimensione finita su K; U, W sottospazio di V; ∈ U base di U

∈ W base di W;

U + W = L k { , } (non è necessariamente una base)

Se U ∩ W = {0} U ⊕ W = L k { , } è una base

**DEF.**

V spazio vettoriale di dimensione finita su K;

Una funzione f : V W è detta funzione lineare oppure applicazione lineare oppure trasformazione lineare oppure **omomorfismo** di spazi vettoriali se:

1. f() = (**additività**) ∀ ∈ V

Ovvero, presi due qualsiasi elementi di V, l’immagine della somma è uguale alla somma delle immagini

1. f( ⋅v ) = ⋅w f(); (**omogeneità**) ∀ ∈ K; ∀ v ∈ V

Ovvero l’immagine del prodotto tra un qualsiasi elemento v dello spazio V e un qualsiasi scalare del campo K è uguale al prodotto tra lo scalare e l’immagine di v

Ovvero dati due spazi vettoriali V e W definiti su un campo K e un’applicazione lineare f : V W, quest’ultima si dice un **omomorfismo** se gode delle proprietà di **additività** e **omogeneità**.

**Monomorfismo**

F è un **monomorfismo** se è un omomorfismo iniettivo, cioè se elementi distinti di V mediante F hanno immagini distinte:

**Epimorfismo**

F è un **epimorfismo** se è un omomorfismo suriettivo, cioè se ogni elemento del codominio W è l’immagine di un elemento del dominio V**:**

**DEF.**

Un omomorfismo biettivo si dice **isomorfismo**, ovvero se per ogni vettore w di W esiste un unico elemento del dominio che ha per immagine w.

**Proposizione**:

V,W spazio vettoriale su K; f: V W lineare allora:

1. Im(f) è un sottospazio di W
2. Se L k { v1,…,vm } = V L k { f(v1),…,f(vm) } = Im(f)

Cioè se v1,…,vm generatori di V f(v1),…,f(vm) generatori di Im(f)

1. f **suriettiva** ⬄ dim k (Im(f)) = dim k (W)

**Osservazione**:

Se v1,…,vm base di V non è detto che f(v1),…,f(vm) sia una base di Im(f), cioè non è detto che f(v1),…,f(vm) siano linearmente indipendenti.

**DEF. NUCLEO**

V,W spazio vettoriale su K; f: V W lineare allora

Definiamo **nucleo** di f e lo indichiamo con Ker(f), l’insieme degli elementi del dominio V che hanno come immagine mediante f lo zero di W, ovvero il sottoinsieme del dominio formato dai vettori di V che vengono mandati in zero da f, ossia:

**Osservazione**:

Una funzione f è **iniettiva** ⬄ ker(f) = {0}, cioè ⬄ f ha nucleo banale

**Teorema Nullità + Rango**

V,W spazio vettoriale su K; f: V W lineare allora:

dim k (ker f) + dim k (Im(f)) = dim k (V)

^ ^

nul(f) + rg(f) - dim k (V)

**Corollario**:

V,W spazio vettoriale su K; f: V W lineare allora:

1. Se dim k (V) > dim k (W) f non è **iniettiva**
2. Se dim k (V) < dim k (W) f non è **suriettiva**
3. Se dim k (V) = dim k (W) f è **iniettiva** ⬄ f è **suriettiva**

**DEF.**

Una **matrice rappresentativa** rappresenta la trasformazione lineare cui è riferita rispetto a due fissate basi degli spazi vettoriali di partenza e di arrivo.

V,W spazio vettoriale su K di dimensione finita n; B base di V

Id v : V V ha **matrice** **rappresentativa**

A id ,, = In

Se considero , basi di V A id , , è la matrice del cambio di base da a o matrice del cambio di coordinate da B 1 a B 2.

A id , , ⋅ = =

**Proposizione**: Come si ottiene

Consideriamo un’applicazione lineare f: V W e se due basi , rispettivamente una dello spazio vettoriale V e una di W:

1. Determiniamo l’immagine rispetto a f di ogni vettore della base :
2. I vettori così ottenuti sono elementi di W, e possono quindi essere espressi come combinazione lineare dei vettori della base dello spazio W:

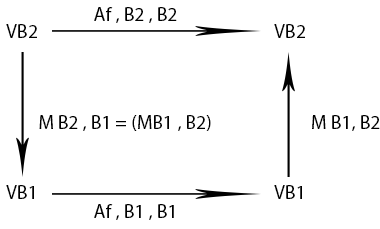
E ne costruisco la matrice risultante.

**Osservazione IMPORTANTE**:

Ogni matrice associata a un’applicazione lineare ha un numero di righe uguale alla dimensione dello spazio vettoriale d’arrivo e un numero di colonne che uguaglia la dimensione dello spazio vettoriale di partenza.

**Osservazione**:

Se V = W e B1 base ho f: VB1 B1, considero una base B2 di V f(VB2) B2



Af , B2 , B2 = M B1 , B2

Af , B1 , B1 ( M B1 , B2 ) -1 Af , B2 , B2 ~ Af , B1 , B1

A ~ B ⬄ ∃ invertibile B = CAC-1

Cioè la matrice rappresentativa di un **endomorfismo** è unica a meno di similitudine.

Quindi: Se A, B Mn (**ℝ**) e A ~ B A e B rappresentano lo stesso **endomorfismo**.

F: **ℝ**n  **ℝ**n; Inoltre se A = CBC-1C è la **matrice del cambio di coordinate**.

Un **endomorfismo** è un omomorfismo di uno spazio vettoriale in sé, per il quale cioè dominio e codominio coincidono. Si presenta quindi nella forma f : V V

**DEF.**

Sia n ∈ *Z* ≥ 0;

Il **determinante** (di ordine n) è una funzione:

det: **ℝ**n x **ℝ**n x … x **ℝ**n **ℝ**

Tale che:

1. È lineare in ogni variabile, cioè:

det() = det(); ∀ ∈ **ℝ**; ∀ i = 1,…,n

det() = det() + det(); ∀ i = 1,…,n

1. det() = 0 se per qualche i ≠ j
2. det() = 1

Inoltre, se sono le coordinate di n punti in **ℝ**n  il volume del parallelepipedo n-dimensionale costruito a partire dai lati che hanno un estremo nell’origine e l’altro estremo in uno dei punti dati è Vol() = | det() |

**Osservazione**:

Se A = () det(A) = det ()

^

Colonne di A

**Lemma**:

Il determinante è antisimmetrico, cioè det() = - det()

**DIMOSTRAZIONE**:  
det() = det() =

(1) = det() = det() =

^ ^

Due argomenti uguali = 0 (2)

= det() =

= det() - det() =

^ ^

Due argomenti uguali = 0 (2)

= - det() - det() = - det()

^ ^

Due argomenti uguali = 0 (2) c.v.d.

**Proposizione**:

1. det = = ⋅ ⋅ … ⋅
2. Sommare a un argomento un multiplo reale di un altro non cambia il determinante.
3. det =

**DIMOSTRAZIONE**:  
1) det = det(, … , ) = ⋅ ⋅ … ⋅ det(, … , ) = ⋅ ⋅ … ⋅

2) det() | det() = (1)

= det() + det()

^ = 0

3) Segue da 1 e 2 usando gauss per colonne c.v.d.

**Corollario**:  
v1,…,vn ∈ **ℝ**n  le seguenti sono equivalenti:

1. v1,…,vn sono indipendenti
2. det(A) = det(v1,…,vn) ≠ 0, cioè A non singolare ⬄
3. ⬄ ∃ A-1 , cioè A è invertibile

**TEOREMA Sviluppo Di Laplace**

Sia A = (aij) ∈ Mn (**ℝ**);

det(A) = det(Aij); ∀ j = 1,…,n

**Proposizione**:

det(At) = det(A); ∀ A ∈ Mn (**ℝ**);

**TEOREMA di BINET**

det(AB) = det(A) det(B); ∀ A,B ∈ Mn (**ℝ**);

**Corollario**:

Se A ∈ Mn (**ℝ**) è invertibile det(A-1) =

**DIMOSTRAZIONE:**

1 = det(I) = det(A A-1) = det(A) ⋅ det(A-1) c.v.d

**DEF.**

V spazio vettoriale su K; Con K = **ℝ, *C*,** Q;

Una **norma** su V è una funzione || ⋅ || : V R tale che:

1. || v || ≥ 0; ∀ v ∈ V;
2. || v || = | | ⋅ || v ||; ∀ v ∈ V; ∀ ∈ K;
3. || v1 + v2|| ≤ || v1 || + || v2 ||; ∀ v1,v2 ∈ V;

La **norma** di un vettore è un’applicazione che a un vettore associa un numero reale.

**DEF.**

La norma || v || di un vettore v ∈ V è anche detto **modulo** o **lunghezza** di V

**Osservazione**:

La lunghezza di un vettore non è un concetto intrinseco nella definizione di spazio vettoriale.

La **norma euclidea** è || v ||2 =

Ovvero si calcola estraendo la radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti del vettore.

**DEF.**

V spazio vettoriale su K con || ⋅ ||;

v ∈ V è detto **vettore** **unitario** o **versore** se || v || = 1

**Osservazione**:

se v ≠ ov allora **normalizzare** v vuol dire passare dal vettore v al **versore** associato

Si ha che:

|| || = || || = || || ⋅ || v || =  = 1

Il **versore** è un vettore di lunghezza unitaria (modulo uguale a 1) e che viene usato per caratterizzare altri vettori, il suo scopo è infatti quello di individuare una specifica direzione.

Infatti, il versore associato a un vettore è un vettore avente stessa direzione e stesso verso ma con modulo pari a 1

**DEF.**

V spazio vettoriale su K; Con K = **ℝ, *C*,** Q;

Un **prodotto** **scalare** su V è una funzione: < ⋅ , ⋅ > :

V x V K

(v1,v2) (v1,v2)

Tale che:

1. < v , v > ≥ 0; ∀ v ∈ V;

< v , v > = 0 ⬄ v = ov

1. < v1 , v2 > = < v2 , v1 >; ∀ v1 ,v2 ∈ V;
2. È bilineare, cioè è lineare nulle due variabili, ovvero:

< v1 + v2, v3 > = < v1 , v3 > + < v2 , v3 >; ∀ v1 ,v2, v3 ∈ V;

< v1 , v2 + v3 > = < v1 , v2 > + < v1 , v3 >; ∀ v1 ,v2, v3 ∈ V;

< v1 , v2 > = < v1 , v2 > = < v1 , v2 >; ∀ v1 ,v2 ∈ V; ∀ ∈ K;

Il **prodotto** **scalare** **euclideo** ( o **standard** ) è :

< v1 , v2 > = = + + … + ; ∀ v1 = (x1,…,xn),v2 = (y1,…,yn)∈ V;

< v1 , v2 >\* = + + - - ;

Per definizione il prodotto scalare associa a una coppia di vettori un numero reale, e in particolare la somma dei prodotti delle componenti dei due vettori.

**Proposizione**:

V spazio vettoriale su K; con < ⋅ , ⋅ > se < v1 , v2 > = 0; ∀ v2 ∈ V v1 = ov

Cioè il prodotto scalare è **non** **degenere**.

Un prodotto scalare è **degenere**, se possiamo trovare almeno un vettore non nullo che moltiplicato scalarmente per qualsiasi vettore dello spazio V dà zero.

**Osservazione**:

V spazio vettoriale su K; con < ⋅ , ⋅ >; Il prodotto scalare induce una norma su V;

|| v || = ; ∀ v ∈ V;

Il prodotto scalare euclideo su **ℝ**n induce la norma euclidea.

**Proposizione Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**:

V spazio vettoriale su K, con < ⋅ , ⋅ > e || ⋅ || indotta; | < v1 , v2 > | ≤ || v1 || ⋅ || v2 ||; ∀ v1 ,v2 ∈ V;

|| v1 || ⋅ || v2 || ⬄ v1 ,v2 linearmente dipendente

**DEF.**

V spazio vettoriale su K, con < ⋅ , ⋅ > e || ⋅ || indotta;

v1 ,v2 ∈ V sono detti **ortogonali** e si indica con v1 ⊥ v2 , se < v1 , v2 > = 0

Sia l’angolo formato da v1 e v2

cos() =

**Osservazione**:

Se < v1 , v2 > > 0 è **acuto** cioè 0 < <

Se < v1 , v2 > < 0 è **ottuso** cioè < < π

**Osservazione**:

Se v1 ≠ 0 e v2 ≠ 0 e v1 ⊥ v2 v1 , v2 sono **indipendenti** , non è vero il viceversa.

**Osservazione**:

v = ov è l’unico vettore ortogonale a ogni vettore di V (poiché il prodotto scalare è non degenere)

**Proposizione Teorema Di PITAGORA**  
V spazio vettoriale su K, con < ⋅ , ⋅ > e || ⋅ || indotta;

< v1 , v2 > = 0 ⬄ || v1 + v2 ||2 = || v1 ||2 ⋅ || v2 ||2

**Osservazione**:

Se V = **ℝ**2; K = **ℝ** ; < ⋅ , ⋅ > è il prodotto scalare euclideo.

Il precedente teorema è il teorema di Pitagora classico.

**DEF.**

V spazio vettoriale su K, con < ⋅ , ⋅ > e || ⋅ || indotta; B una base di V

1. B è una base **ortogonale** se < v , w > = 0; ∀ v,w ∈ B; con v ≠ w
2. B è una base **ortonormale** se < v , w > =

Cioè B è ortonormale se B è ortogonale e se || v || = 1; ∀ v ∈ B;

Una base **ortonormale** è una base **ortogonale** in cui tutti i vettori hanno norma unitaria rispetto a un fissato prodotto scalare

**Osservazione**:

Data una base **ortogonale** ne posso sempre ottenere una **ortonormale** sostituendo ogni vettore v ∈ B con il versore associato =

**DEF. PROIEZIONE ORTOGONALE**

V spazio vettoriale su K, con < ⋅ , ⋅ > e || ⋅ || indotta; ∀ v,u ∈ V;

Cerco la **proiezione ortogonale** di v su u ( u ≠ 0 )

Pru(v) = u

Devo avere:

0 = < v - Pru(v), Pru(v) > = < v - u , u > = < v , u > - < u , u > = < v , u > - < u , u >

= 🡨 **coefficiente di fourier** di v rispetto a u

Definisco:

Pru(v) = u = u

**Teorema Di Ortogonolizzazione di Gram-Schmidt**

Il metodo permette di costruire una famiglia di vettori ortogonali partendo da una famiglia di vettori linearmente indipendenti.

V spazio vettoriale su K, con < ⋅ , ⋅ > e || ⋅ || indotta;

Siano v1 ,…,vm ∈ V ∃ w1 ,…,wm ∈ V tali che:

1. Lk { w1 ,…,wm } = Lk { v1 ,…,vm }
2. < wi , wj > = 0; ∀ i,j = 1,…,m; con i ≠ j;

*wi =* ∀ i = 2,…,m

Inoltre, se linearmente indipendenti linearmente indipendenti.

Quindi se { }è una base di V { } è una base ortogonale di V.

Il teorema dunque ci assicura **l’esistenza** di una famiglia di vettori w1 ,…,wm ∈ V linearmente indipendenti, ortogonali tra loro e tali da generare lo stesso spazio generato da v1 ,…,vm

**DEF.**

V spazio vettoriale su K di dimensione finita, con < ⋅ , ⋅ > e || ⋅ || indotta; W sottospazio di V;

B = { } base ortogonale di v ∈ W su W è:

Prw (v) = Prw1 (v) + Prw2 (v) + … + Prwm (v) = + … +

**Osservazione**:

La precedente definizione non vale se B non è ortogonale.

**DEF.**

V spazio vettoriale su K di dimensione finita, con < ⋅ , ⋅ > e || ⋅ || indotta; W sottospazio di V;

Il **completamento** **ortogonale** di W è l’insieme:

W⊥ = { v ∈ V | < v , w > = 0; ∀ w ∈ W } cioè w⊥ è l’insieme di tutti i vettori di V ortogonali a ogni vettore di W

**Osservazione**:

W⊥ è sottospazio vettoriale, infatti < o , w > = 0; ∀ w ∈ W o ∈ W⊥ ≠ ∅

v1 , v2 ∈ W⊥  ∀ w ∈ W

= + = 0; ∀ w ∈ W

^ = 0 ^ = 0

Quindi v1 + v2 ∈ W⊥

= = ⋅ 0 = 0; ∀ ∈ K; ∀ w ∈ W

^ = 0

Quindi ∈ W⊥ W⊥ è sottospazio

**Proposizione**:

V spazio vettoriale su K di dimensione finita, con < ⋅ , ⋅ > e || ⋅ || indotta; W sottospazio di V;

B = { } base di W v ∈ W⊥ ⬄ ∀ wi ∈B

**DIMOSTRAZIONE**:  
Ovvio

w ∈ W w =

< v , w > = < v , > = <> + … + <> = 0 c.v.d.

**Osservazione**:

Se v ha dimensione finita W ⊕ W⊥ = V

dimk (W⊥) = codimk (W)

codimk (W⊥) = dimk (W)

(W⊥)⊥ = W

**Osservazione**:

Cerco una base di W1⊥ ≠ cerco una base ortogonale di W1

**Proposizione**:

A Mn (**ℝ**);

A ortogonale ⬄ Le colonne (o righe) di A formano una base ortonormale di **ℝ**n (A-1 = At)

**Osservazione**:

Se si hanno due basi ortonormali di uno spazio vettoriale la matrice del cambio di coordinate è una matrice ortogonale.

**DEF.**

V spazio vettoriale su K; f: V V lineare (endom) endom = endomorfismo

v ≠ 0 ∧ v ∈ V è detto **autovettore** di f se ∃ ∈ K | f(v) = v

Il tal caso è detto **autovalore** di f.

L’insieme degli autovalori di f è detto **spettro** di f e si indica con **σ(f)** che equivale anche al **nucleo**.

**DEF.**

A Mn (**K**); v ∈ Kn è un **autovettore** di A

Se v è un autovettore di A è autovettore dell’endomorfismo associato ad A rispetto a una qualche base di Kn

Analogamente ∈ K è autovalore dell’endomorfismo associato.

**DEF.**

A Mn (**K**)

Si dice che lo scalare è un **autovalore** della matrice quadrata A se esiste un vettore colonna non nullo v ∈ Kn tale che

Il vettore v è detto **autovettore** relativo all’autovalore

**Osservazione**:  
V spazio vettoriale su K di dimensione finita n; Sia B base di V

f:V V endomorfismo; A = A**f, B, B**  Mn (**K**);

f(v) = v

A ⋅ ζB (v) = PB (v) per semplicità Av = v

Av – Av = Ov

(A – Im) v = Ov

Quindi se v è autovettore di f v ∈ Ker() dove è l’endomorfismo con matrice rappresentativa.

A = A – Im e se v ≠ 0 ∧ v ∈ Ker() v è autovettore di f.

**DEF.**

E() = Ker() è detto **autospazio di** f relativo all’autovalore ∈ f

**Osservazione**:

L’**autospazio** di f relativo a ∈ σ(f) è l’insieme di tutti gli autovalori di f relativi a a cui aggiungo il vettore nullo. (corrisponde alle soluzioni del sistema, gli elementi del sistema sono gli autovettori relativi ai vari autovalori)

**RIEPILOGANDO (dal libro)**

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e sia f: V V un’applicazione lineare da V in V. Un vettore v V, diverso dal vettore nullo, è detto **autovettore** di f se esiste uno scalare tale che .

In tal caso, lo scalare è detto **autovalore di f.** L’insieme degli autovalori è detto **spettro** di f ed è indicato con

Supponiamo che V abbia dimensione finita n. Sia B una base di V e sia A = la **matrice rappresentativa** di f rispetto alla base B. Poiché f è un operatore lineare, allora A è quadrata e ha ordine uguale alla dimensione n di V.

Quando si scrive che è un autovalore, o che v è un autovettore, di una matrice quadrata A, si intende che è un autovalore, o che v è un autovettore, dell’operatore lineare associato ad A, di cui A è matrice rappresentativa rispetto a una base fissata su V.

La condizione che deve soddisfare un vettore non nullo v per essere un autovettore di f, si scrive

(A -

Si deduce che v è un autovettore di f ⬄ è nel nucleo dell’operatore lineare .

Il **nucleo** Ker( di è un **sottospazio vettoriale di V** composto dal vettore nullo e da tutti e soli gli autovalori di f rispetto a un fissato valore di .

Quindi, i valori di per cui Ker( è non banale, cioè non è formato solo dal vettore nullo, sono detti autovalori di f e Ker( è detto **autospazio** di f rispetto all’autovalore .

Dunque, è un autovalore per f ⬄ Ker(è non banale

**Osservazione**:

Poiché E() è il nucleo di una funzione lineare E() è un sottospazio vettoriale di V.

**Osservazione**:

∈ σ(f) ⬄ Ker() è non banale ⬄ è non iniettiva quindi: ∈σ(f) ⬄ det(A - I) = 0

Poiché se det(A - I) ≠ 0 rg(A - I) = n = dimk (V) dimk (Ker()) = n - n = 0

^

dimk ())

**DEF.**

p() = det(A - In) è detto **polinomio** **caratteristico** di A e p() ∈ k[] e deg(p()) = n.

p() = 0 è detta **equazione** **caratteristica** di A.

Per calcolare gli autovalori di una matrice è sufficiente calcolare gli zeri del suo polinomio caratteristico.

**Osservazione**:

Se K = C p() = 0 ha esattamente n soluzioni (contate con molteplicità)

Se K = **ℝ** (o Q) p() = 0 ha al massimo n soluzioni (contato con molteplicità)

**Proposizione**:

V spazio vettoriale su K; f:V V endomorfismo;

Se ∈ σ(f); E() ∩ E() = {ov}

Quindi se ∈ σ(f) tutti distinti e se v1 ∈ E(), vm ∈ E() v1,…,vm sono linearmente indipendenti.

**Teorema**

a(x), b(x) ∈ **ℝ**[x]; deg[a(x)] > deg[b(x)]

Allora ∃! q(x), r(x) ∈ **ℝ**[x] | a(x) = q(x) b(x) + r(x); con deg[r(x)] < deg[b(x)]

**Osservazione**:

**DEF.**

a(x), b(x) ∈ **ℝ**[x]; deg[a(x)] ≥ deg[b(x)]

b(x) / a(x) ⬄ r(x) = 0; cioè se ∈ **ℝ**[x]; cioè se b(x) è un divisore di a(x)

Altrimenti se r(x) ≠ 0 b(x) non divide a(x)

**Teorema**

p(x) ∈ **ℝ**[x];

x0 ∈ **ℝ** **radice** di p(x) ⬄ (x - x0) / p(x) cioè p(x0) = 0

**Osservazione**:

I precedenti teoremi tranne l’ultimo valgono in *C*(x)

**DEF.**

p(x) ∈ **C**[x]; x0 ∈ **C**; p(x0) = 0

x0 ha **molteplicità algebrica** m ∈ *Z* > 0 se p(x) = (x - x0)m q(x) con q(x0) ≠ 0; cioè se (x - x0)m / p(x) e (x - x0)m+1 / p(x)

Se m = 1 x0 è detto **radice** (o **zero**) **semplice** di p(x)

**DEF.**

A ∈ Mn (K);

A è detta **diagonalizzabile** se è simile a una matrice diagonale

D ∈ Dn (K) se ∃ M ∈ GLn (K) | M-1AM = D

**Osservazione**:

Non tutte le matrici sono diagonalizzabili

**DEF.**

V spazio vettoriale di dimensione finita su K; f:V V endomorfismo;

f è diagonalizzabile se è diagonalizzabile la matrice rappresentativa di X rispetto a qualche base fissata di V.

**Osservazione**:

Sia A rappresentativa di un endomorfismo f rispetto a una base B di V la matrice rappresentativa di f rispetto a un’altra base di V è simile ad A.

Quindi diagonalizzare f vuol dire trovare una base di V tale che la matrice rappresentativa di f sia diagonale

**DAGLI ESERCIZI**

L’endomorfismo f è diagonalizzabile ⬄ la somma delle molteplicità algebriche è uguale al numero di colonne della matrice A e per ogni autovalore la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità

geometrica.

Se la matrice iniziale A è simmetrica rispetto a una base ortonormale (ad esempio la base canonica), allora è possibile ottenere una base ortonormale di autovettori, cioè è possibile trovare la matrice M ortogonale

**Proposizione**:

Il polinomio caratteristico di matrici simili è uguale.

**DEF.**

V spazio vettoriale di dimensione finita su K; f:V V endomorfismo;

Il polinomio caratteristico di f è :

pf() = det(A - Im) con A = Af , B , B per qualche base B di V e l’equazione caratteristica è pf() = 0

**DEF.**

Sia ∈ σ(f);

La **molteplicità** **algebrica** di indicato con ma () è la molteplicità algebrica di come radice di pf(

La **molteplicità** **algebrica** di un autovalore è il numero che esprime quante volte l’autovalore annulla il polinomio caratteristico

La **molteplicità** **geometrica** di indicato con mg () è la dimensione dell’autospazio relativo, cioè:

mg () = dimk (E())

posso anche usare **mg () = dim() – rg(A**

dove dim() = n è la dimensione della matrice quadrata A

**Proposizione**:

V spazio vettoriale su K; f:V V endomorfismo;

1 ≤ mg () ≤ ma (); ∀ ∈ σ(f);

**Proposizione**:

V spazio vettoriale di dimensione finita su K; f:V V endomorfismo;

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f è diagonalizzabile ⬄
2. ∃ una base di V formata da autovettori di f ⬄
3. ∀ ∈ σ(f) ⬄

**Corollario**:

V spazio vettoriale su K; f:V V endomorfismo;

Se f ha n autovalori distinti (cioè #σ(f) = n) e; ∀ ∈ σ(f)

E f è diagonalizzabile.

**Osservazione**:

V spazio vettoriale su K; f:V V endomorfismo; B base di V; A = Af, B , B

Se f diagonalizzabile ∃ Dn (k); M ∈ GLn (k) | D = M-1AM

Dove D = con σ(f) = { , … , }

Sia una base di autovettori di f allora M = , se B = ζn le colonne di M formano la base di

**Osservazione**:

D ed M non sono uniche, ma se una colonna i di D contiene un autovalore in E()

**DEF.**

V spazio vettoriale di dimensione finita su K; f:V V endomorfismo; W sottospazio di V;

W è invariante per f se f(w) ∈ W; ∀ w ∈ W;

**Osservazione**:

Ogni autospazio di f è un sottospazio invariante per f.

**DEF.**

V spazio vettoriale su K con < ⋅ , ⋅ > e || ⋅ || indotta; f:V V endomorfismo; B base ortonormale di V;

Af , B , B f è detto simmetrico se A è una matrice simmetrica

**TEOREMA SPETTRALE**

V spazio vettoriale su **ℝ** di dimensione finita con prodotto scalare e < ⋅ , ⋅ > e || ⋅ || indotta;

f:V V endomorfismo;

∃ una base ortonormale di autovettori di f ⬄ f è simmetrico

Il teorema spettrale reale stabilisce che ogni matrice simmetrica a coefficienti reali è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale

**DEF.**

Si dice che f : V è un **endomorfismo simmetrico** ⬄ *,*  il prodotto scalare tra l’immagine mediante f e il vettore uguaglia il prodotto scalare tra e l’immagine di mediante f, in simboli:

), *,*

**Osservazione**:

Se f endomorfismo simmetrico di uno spazio vettoriale V e , ∈ σ(f) con ≠ ∧ v1 ∈ E()

∧ v2 ∈ E() v1 ⊥ v2 , ma non è detto che se v1,v2 ∈ E() v1 ⊥ v3

**DEF.**

Sia π un piano.

Un **riferimento** **affine** sul piano è una terna **Ra (o, )** con o punto del piano e vettori geometrici linearmente indipendenti. Il punto o è detto **origine**.

Fissiamo ora un riferimento affine sul piano.

A ogni punto del piano posso associare delle coordinate nel seguente modo:

Al punto P associo il vettore , ma poiché { } è una base di vettori geometrici si ha che:

, con x,y ∈ **ℝ** e x,y sono le coordinate di rispetto alla base { }.

Quindi associo a P le coordinate del vettore e questo si indica con p

Viceversa, a ogni vettore geometrico posso associare un punto P del piano, infatti considero il rappresentante associo il secondo estremo di al vettore .

**Osservazione**

Un **vettore applicato** è associato ad un determinato punto di origine (O)

Un **vettore libero** non è vincolato a un determinato punto di origine, l’insieme di tutti i vettori liberi del piano è detto insieme quoziente

**DEF.**

Sia p allora x,y sono dette coordinate di P rispetto a Ra (o, ), x è detta **ascissa** di P, y è detta **ordinata** di P.

La retta generata da passante per O è detta asse delle ascisse o asse X.

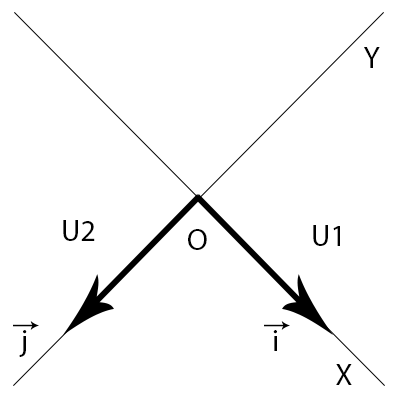
La retta generata da passante per O è detta asse delle ordinate o asse Y.

Le due rette sono dette assi coordinanti.

Se è detto **punto** **unità** dell’asse x e ha coordinate .

Se è detto **punto** **unità** dell’asse y e ha coordinate .

L’origine O ha coordinate .



**Osservazione**:

Si ha che + =

= - = (- ( = (( =

con P1 e P2;

**DEF.**

Siano = ; = ;

< , = < , >

**DEF.**

Un **riferimento** **cartesiano** **Rc (o, )** sul piano è un riferimento affine Ra (o, ) tale che la base

{ } è una base ortonormale rispetto a < ⋅ , ⋅ >

**DEF.**

Siano ∈ e si indica con se sono vettori linearmente **dipendenti**.

**Proposizione**:

= , = sono linearmente dipendenti ⬄ det = 0

**Proposizione**:

1. Il **punto** **medio del segmento** , con P1 e P2ha coordinate M
2. Il **punto simmetrico** di P0 rispetto al punto Pc ha coordinate P0’

**DEF.**

3 punti del piano si dicono allineati se esiste una retta che li contiene tutti.

**Osservazione**:

sono linearmente dipendenti (cioè sono paralleli)

**Proposizione**:

P0, P1, P2 sono allineati.

**DEF. RETTE**

Siano P1, P2 punti distinti e sia r la retta passante per .

Si ha che P ∈ r ⬄ P1, P2,P sono allineati ⬄ , sono linearmente dipendenti (cioè proporzionali) ⬄ = t ⬄ = t ⬄ = + t ⬄

⬄ ; ∀ t ∈ **ℝ;**

Quindi:

= + t ; è un’equazione parametrica di una retta r o analogamente; ∀ t ∈ **ℝ;**

v = è detto **vettore** **direttore** della retta r e ne indica la sua direzione; l,m sono detti **parametri** **direttori** della retta r; P ∈r

**Osservazione**:

Una retta ha infinite equazioni parametriche infatti posso sostituire P0 con un qualunque altro punto della retta.

Posso anche sostituire il vettore direttore v di r con un qualunque altro suo multiplo non nullo.

**DEF.**

Sia v un vettore direttore di una retta r un vettore w è parallelo alla retta r se w // v

**Osservazione**:

Una retta è un sottospazio vettoriale di **ℝ**2 ⬄ r passa per l’origine O.

**Osservazione**:

P1, P2 punti distinti del piano

P appartiene alla retta passate per P1, P2 ⬄ sono linearmente dipendenti ⬄ det=0

Con =

()() – (() = 0

- - = 0

Si ha ax + by + c = 0 che è un’equazione cartesiana della retta e =

a, b sono detti **parametri di giacitura** della retta.

**Proposizione**:

Se ax + by + c = 0 è un’equazione cartesiana di una retta e, viceversa, ogni retta del piano ha un’equazione cartesiana del tipo precedente.

**Osservazione**:

∃ infinite equazioni cartesiane per una data retta.

Infatti, se ax + by + c = 0 è un’equazione cartesiana della retta r ax + by + c = 0 è un’equazione cartesiana della stessa retta r; ∀ ∈ **ℝ;**

**Osservazione**:

Posso verificare se P0,P1, P2 sono allineati considerando la retta r passante per P0 e P1 e verificando se P2 ∈ r**;**

**Osservazione**:

Se cerco la retta r ortogonale A n = passante per P0 P ∈ r ⬄, > 0 ⬄ ⊥ n

() a + () b = 0

ax + by - a - b = 0

Quindi se r ha equazione cartesiana ax + by + c = 0 con n = ≠ e ha equazione parametrica

r: + t ; ∀ t ∈ **ℝ;** con v = ≠ n ⊥ v

Quindi dato v = si ha che n = v = oppure dato n = v = oppure

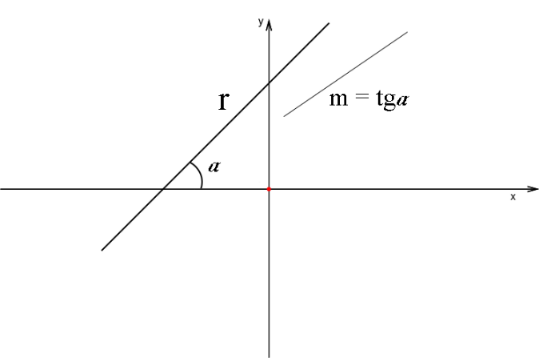
**DEF.**

r: ax + by + c = 0

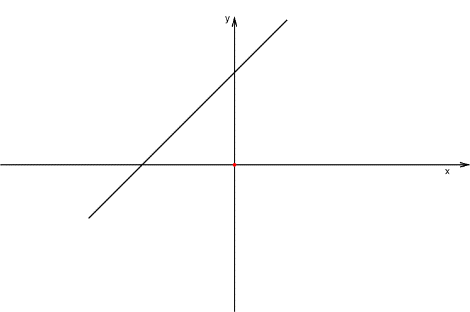
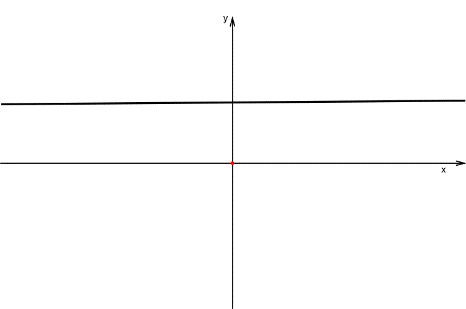
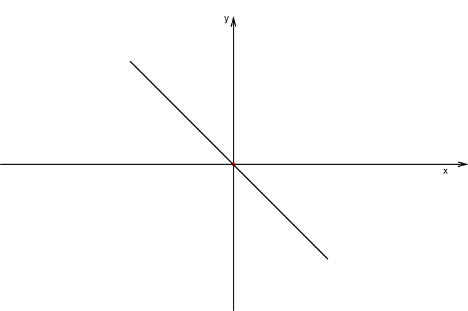
L’equazione cartesiana della retta è anche detta **equazione** **in forma implicita** se b ≠ 0

y =

Cioè y = mx + q, detta **equazione in forma esplicita** con m = **coefficiente** **angolare** e q = **intercetta**



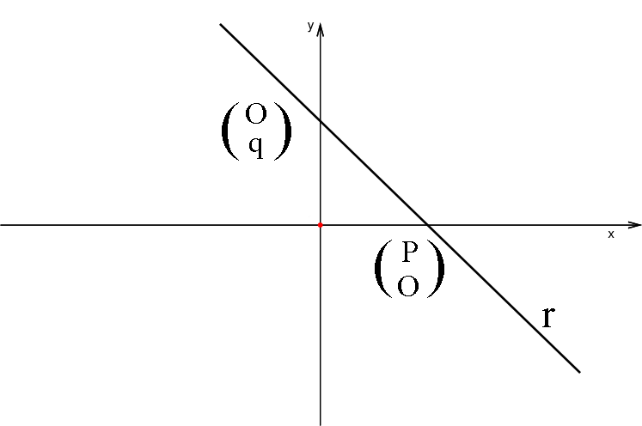
m > 0 m = 0 m < 0

Se b = 0 ∄ m

Se a ≠ 0 ∧ b ≠ 0 ∧ c ≠ 0 y = 1 cioè: + = 1 **equazione** **segmentaria** della retta.

Con p = e q =



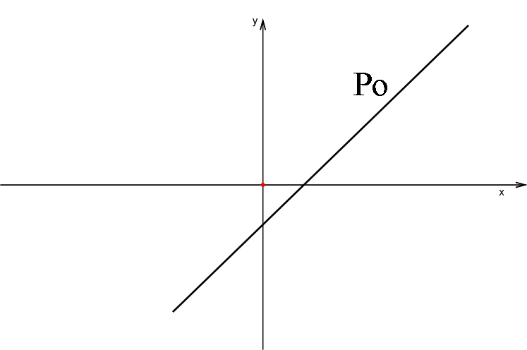
**Osservazione**:

Se ∃ le equazioni in forma esplicita e segmentaria sono uniche.

**Osservazione**:

Le equazioni parametriche di una retta sono lineari nel parametro ; ∀ t ∈ **ℝ;**

Se t ∈ [0;1] le precedenti equazioni descrivono il segmento di estremi P0; P1

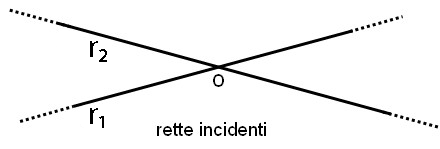


Se t ∈ [0;∞) le precedenti equazioni descrivono una semiretta.

Se t ∈ (-∞;0] le precedenti equazioni descrivono la semiretta opposta.

**Osservazione:**

,rette nel piano

O ,rette incidenti r1 ∩ r2 è un punto 

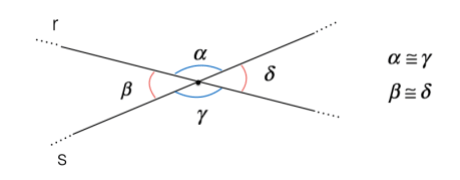
O //

**Osservazione**:

Se = y = x + ; = y = x +  // ⬄ =

**DEF.**

Date due rette nel piano ,esse formano 4 angoli a due a due congruenti e a due a due supplementari



(immagine presa da internet con alfa e beta invertiti)

Se vettore direttore di e vettore direttore di i due angoli si ottengono da:

; ;

Se le due rette sono parallele ;

**DEF.**

, punti del piano;

d(, ) = || || =

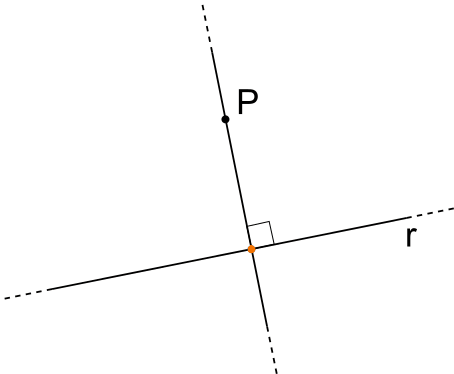
**DEF.**

punto del piano; r = ax + by + c = 0;

d(,r) = inf d(P0, **ℝ**)

**Osservazione**:

Se H punto | d(,h) = inf d(, **ℝ**) la retta n passante per e per h è ortogonale a r, cioè h è la proiezione ortogonale di su r.



**Proposizione**:

punto del piano; r = ax + by + c = 0;

d(,r) =

**Osservazione**:

d(,r) = 0 ⬄ P0 ∈ r

**DEF.**

, rette nel piano;

d(,) = inf d() ∀ , ;

**Osservazione**:

d(,) = 0 se ∩ ≠ 0 cioè se = oppure , incidenti.

d(,) = d(,) = d(,) con , ;

**Proposizione**:

Sia ABCD parallelogramma

1. Area (ABCD) = |det(|
2. Area () = |det(|

**SPAZIO TRIDIMENSIONALE**

**DEF.**

Un **riferimento** **affine** **nello spazio** è una terna (o,) con o **punto dello spazio** e **vettori** **geometrici** linearmente indipendenti (cioè formano una base per )

O è detto origine del sistema di riferimento.

**Osservazione**:

Fissiamo un riferimento affine nello spazio, a ogni punto P dello spazio posso associare delle coordinate nel seguente modo:

A P associo il vettore ∈

*= x; ∀ x,y,z* ***ℝ***

Allora scriviamo P viceversa a ogni vettore ∈ posso associare un punto:

= *x*;

Associo ad il punto P e scriviamo = .

Cioè se B = {}

con = x, cioè x,y,z sono le coordinate di rispetto a B.

⬄ = ⬄ P

**DEF.**

Sia P, allora x,y,z sono dette coordinate di P rispetto a (o,).

X è detta **ascissa** di P, y è detta **ordinata** di P, z è detta **quota** di P.

La retta generata da passante per O è detta asse delle ascisse o asse x.

La retta generata da passante per O è detta asse delle ordinate o asse y.

La retta generata da passante per O è detta asse delle quote o asse z.

Il piano generato da passante per O è detto piano coordinate xy.

Il piano generato da passante per O è detto piano coordinate xz.

Il piano generato da passante per O è detto piano coordinate yz.

Se = è detto punto unità dell’asse X e ha coordinate

Se = è detto punto unità dell’asse X e ha coordinate

Se = è detto punto unità dell’asse X e ha coordinate

**Osservazione**:

Se , =

**DEF.**

Siano = = definisco un prodotto scalare su nel seguente modo:

< > = <, > dove il prodotto scalare su è quello euclideo.

**DEF.**

Un **riferimento** **cartesiano** (o,) dello spazio è un **riferimento** **affine** (o,) tale che {} è una base ortonormale di rispetto al prodotto scalare < ⋅ , ⋅ >

**DEF.**

Siano , ∈

1. // se , sono linearmente dipendenti
2. , sono **complanari** se , sono linearmente dipendenti
3. quattro punti , dello spazio sono detti **complanari** se ∃ un piano che li contiene.
4. tre punti , dello spazio sono detti **allineati** se ∃ una retta che li contiene.
5. due **rette** sono **complanari** se ∃ un piano che le contiene altrimenti sono dette **sghembe**.

**Proposizione**:

1. = = sono linearmente **dipendenti** ⬄ rg = 1
2. = = ; = sono linearmente **dipendenti** ⬄ det = 0

**Proposizione**:

1. = = ; = sono allineati ⬄ , sono linearmente **dipendenti** ⬄

⬄ rg = 1

1. ; ; sono **complanari** ⬄ ,, sono linearmente dipendenti

**Proposizione**:

1. Il **punto medio** M del segmento di estremi con = = ha coordinate :

M

1. Il simmetrico di rispetto al punto C ha coordinate:

**Proposizione**:

Dati tre punti , dello spazio **non** **allineati** ∃! Piano che li contiene

**DEF.**

Siano ; punti dello spazio non allineati = , = sono linearmente **indipendenti** ed ∃! piano π che contiene , P ∈ π ⬄ , , sono linearmente **dipendenti** (poiché , sono linearmente indipendenti)

Quindi se = + per qualche ∈

Quindi:

= +

Quindi nelle equazioni parametriche di un piano π sono:

= + + ; ∀ ∈

**⬄**

π : ; ∀ ∈

Con ∈ π; = = linearmente **indipendenti** , sono detti vettori direttori del piano π.

**Osservazione**:

∃ infinite equazioni parametriche di un piano.

Posso sostituire con un qualunque altro punto del piano. Posso sostituire i vettori direttori con altri due vettori linearmente indipendenti come combinazione lineare dei vettori direttori dati, cioè se , sono vettori direttori di un piano π qualunque altra base del sottospazio vettoriale {, è una coppia di vettori direttori dello stesso piano.

**Osservazione**:

Analogamente al caso della retta nel piano se sono punti distinti ∃! retta r che li contiene.

P ∈ r ⬄ =

Quindi:

r: = + t; ∀ t ∈**;** con =

La precedente è detta equazione parametrica di r e v = ≠ è detto vettore direttore di r e l,m,n sono detti parametri direttori di r.

**Osservazione**:

∃ infinite equazioni parametriche di una retta.

Posso sempre sostituire con un qualunque altro punto della retta e posso sostituire il vettore direttore v con un qualunque suo multiplo reale non nullo.

**Osservazione**:

Data una retta r e un punto P ∉ r ∃! piano π che contiene r e passa per P ∃! piano π

**Osservazione**:

Siano ; punti non allineati ∃! piano π che li contiene.

P ∈ π ⬄ , sono linearmente dipendenti ⬄ det = 0

Sviluppo il determinante lungo la colonna 1

( -+ ( = 0

Da cui:

r: ax + by + cz + d = 0 è un’equazione cartesiana di π con:

a = ; b = - ; c = ; s = ≠ ;

a,b,c sono detti **parametri di giacitura** del piano.

Inoltre + e ⊥ infatti:

< , > = a +b +c = ( – )l – ( – ) + ( – ) =

- - + + - = 0 0 = 0

**Osservazione**:

∃ infinite equazioni cartesiane di un piano π; infatti se ax + by + cz +d = 0 è un’equazione cartesiana di π, allora anche ax + by + cz + d = 0 è un’equazione cartesiana di π; ∀ ∈ ≠ 0

**Osservazione**:

Il piano yz ha equazione cartesiana x = 0.

Il piano xz ha equazione cartesiana y = 0.

Il piano xy ha equazione cartesiana z = 0.

**Osservazione**:

Se a,b,c,d sono tutti diversi da zero è detta **equazione** **segmentaria** del piano con

p = - ; q = - ; r = - .

I piani paralleli a yz hanno equazioni cartesiane x = k.

I piani paralleli a xz hanno equazioni cartesiane y = k.

I piani paralleli a xy hanno equazioni cartesiane z = k.

è l’intersezione del piano con l’asse x;

è l’intersezione del piano con l’asse y;

è l’intersezione del piano con l’asse z;

**Osservazione**:

Un piano π parallelo al piano di equazioni cartesiana ax + by + cz +d = 0 e passante per ha equazione cartesiana π = a(x -) +b(y - + c(z - ) + = 0

**Osservazione**:

L’equazione ax + by + cz +d = 0 rappresenta un piano nello spazio se ≠

**Osservazione**:

Due piani , nello spazio o sono **incidenti** e ∩ è una retta, oppure sono paralleli

**Osservazione**:

Siano : , : piani incidenti, allora:

r: è una retta e le precedenti equazioni sono dette equazioni cartesiane di r

**Osservazione**:

∃ infinite equazioni cartesiane di una retta data poiché esistono infiniti piani che passano per una retta data.

**Osservazione**:

Se punti distinti;

∃! retta passante per e e P ∈ r ⬄ = t ; ∀ t ∈

Quindi una retta nello spazio ha equazioni parametriche:

r : = ; con ≠ e l,m,n parametri direttori di r. ∀ t ∈

**Osservazione**:

Siano , due rette nello spazio o sono **complanari** o:

O sono sghembe (sono privi di punti in comune)

**Osservazione**:

Siano π piano e r retta nello spazio o r,π sono incidenti e r π è un punto o r // π

**Proposizione**:

:

: ⬄ det

Rette nello spazio , sono sghembe

**DEF.**

Gli angoli formati da due rette, nello spazio con vettori direttori , rispettivamente definiti da:

; ; ;

**Osservazione**:

⊥ ⬄ ⬄ = 0

**Osservazione**:

Due rette formano quattro angoli (e possono essere ortogonali) anche se non sono incidenti ne complanari.

**DEF.**

Siano : , : piani con .

Gli angoli formati da e sono definiti da:

; ; ;

**Osservazione**:

⊥ ⬄ ⬄ = 0

**DEF.**

r : = ; ∀ t ∈ ; ; π: ax + by + cz + d = 0; ;

L’angolo è definito come il numero tale che: 0 ≤ ≤

**DEF.**

Siano punti dello spazio la distanza tra è:

d() =

**DEF.**

Sia punto dello spazio e sia r retta d() = inf d(

**Osservazione**:

Sia piano passante per e ⊥ r e sia {h} = ∩ r d() = d()

**Osservazione**:

d() = 0 ⬄ P ∈ r

**DEF.**

Sia punto dello spazio e piano d() = d()

**Osservazione**:

Se r retta passante per e ⊥ e sia {h} = r∩ d() = d()

**Proposizione**:

punto dello spazio; π: ax + by + cz + d = 0 piano d() =

**DEF.**

Siano , piani dello spazio d(, = inf d() ∀ ∈;∈

**Osservazione**:

d(, = 0 se ∩ ≠ ∅ se = oppure se , incidenti.

Se ∩ = , sono distinti d(, = d(, ∀ ∈; ∈

**DEF.**

Siano r retta e piano nello spazio d(r, = inf d(R,P) ∀ ∈ r ; P∈

**Osservazione**:

d(r, = 0 se ∩ ≠ ∅,cioè se incidenti oppure r ⊂

Se ∩ = ∅ e r ∉ d(r, = d(R,; ∀ ∈ r;

**DEF.**

Siano , rette nello spazio d(, = inf d(, ∀ ∈; ∈

**Osservazione**:

d(,) = 0 se ∩ ≠ ∅,cioè se = oppure incidenti;

Se d(,) = d(,) = d(,) ∀ ∈; ∈

Se , sghembe d(,) = d(,) = d(,) = d(,) con piano | , e piano | , e con {} = ∩ ∧ {} = ∩ con retta | ⊥ , ⊥ ;, incidenti e , incidenti. ( ∃!)

**Osservazione**:

Se si ha un parallelepipedo definito con , , ∈ ;

V(π) = | det(, ,) | e il volume del tetraedro T definito da , , è Vol(T) = | det(, ,) |

**DEF.**

Il **prodotto** **vettoriale** è la funzione:

∧:

Definita nel seguente modo:

Se , = =

**Osservazione**:

A volte si indica con

**Proposizione**:

1. = ; ∀ ∈;
2. ( + ( ∀ ∈;
3. = = (; ∀ ∈; ∀ ∈;
4. < ,> = 0; ∀ ∈;

< ,> = 0;

1. = ⋅ - ; ∀ ∈;
2. = 0 ⬄ , cioè lineramente dipendenti

**Osservazione**:

Il prodotto vettoriale di è ortogonale a ed è orientato seguendo la “regola della mano destra”.

**Osservazione**:

Si può scrivere

= det sviluppando lungo la prima colonna =

= - +

**Osservazione**:

Sia r: retta con un vettore direttore di r è =

**DEF.**

Siano ∈ il prodotto misto di è | < > |

**DEF.**

Sia V spazio vettoriale su di dimensione finita e siano basi di V; Sia M = la matrice del cambiamento di base:

Se det(M) > 0 sono dette **equiverse**.

Se det(M) < 0 sono dette **controverse**.

**Osservazione**:

det(M) > 0 ⬄ det(M-1) > 0

**CAMPO DI RIFERIMENTO CARTESIANO**

**Proposizione**:

Siano ζ = Rc (o, ) e due riferimenti cartesiani con B = {, B’ = { basi ortonormali di e sia P un punto del piano con coordinate rispetto a ζ e rispetto a ζ’.

Cioè ζ(P) = ; ζ’(P) = e sia M = ζ(P) = M ζ’(P) + ζ(O’) ∧ ζ’(P) = M-1 ζ(P) + ζ’(O)

Cioè = M + ζ(O’) ∧ = M-1+ ζ’(O)

Poiché M ∈ () e ζ’(O) = - M-1 ζ(O’) si ha: = Mt  - Mt ζ(O’)

**Proposizione**:

Siano ζ = Rc (o, ) e due riferimenti cartesiani con B = {, basi ortonormali di , sia P un punto del piano con coordinate rispetto a ζ e rispetto a ζ’.

Cioè ζ(P) = ; ζ’(P) = e sia M = ζ(P) = M ζ’(P) + ζ(O’) ∧ ζ’(P) = Mt ζ(P) + ζ’(O) =

= - Mt ζ(O’)

**ROTAZIONI**

Sia ζ = Rc (o, ) una rotazione del piano con centro in O di angolo ∈ [0;2π] in senso antiorario è definita dalla matrice R(= cioè se P l’immagine P’ di P rispetto a tale rotazione ha coordinate = R( =

**Osservazione**:

Posso considerare ∈se < 0 la rotazione gira in senso orario di ||

**Osservazione**:

R() ∈ (); ∀ ∈;

infatti:

< = - + = 0

= = 1; = = 1

Inoltre:

det(R()) = = 1 quindi R() ∈ () (gruppo speciale ortogonale)

Matrici ortogonali ; | det(M) = 1

**Osservazione**:

Le rotazioni del piano corrispondono agli elementi di ()

**Osservazione**:

Nello spazio le rotazioni del piano corrispondono agli elementi di ()

**Teorema Di Eulero**

M ∈ () M ha almeno un autovalore reale λ = 1

**Osservazione**:

Quindi se M ∈ () ha autospazio E(1) di dimensione ≥ 1 ed è un sottospazio invariante e poiché

λ = 1 se v ∈ E(1) Mv = λv = v

**Osservazione**:

Quindi una rotazione nello spazio ha sempre un asse di rotazione. Supponiamo che tale asse passi per l’origine.

Se v = è un vettore direttore dell’asse di rotazione di angolo , in senso antiorario “guardando l’asse dall’alto” la rotazione è descritta dalla matrice:

R() ) =

**ROTAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI**

z = x + iy; con x,y ∈ ; i2 = -1

**Teorema Di Eulero**

∀ ∈;

= = 1

**Osservazione**:

z ⬄ ⬄

**Osservazione**:

z’ = z’ è l’immagine di z rispetto alla rotazione di angolo in modo antiorario.

=

**Osservazione**:

Quindi la rotazione di un punto del piano equivale alla moltiplicazione di 2 numeri complessi.

**QUATERNIONI DI HAMILTON**

**DEF.**

L’insieme dei quaternioni è l’insieme degli elementi q = a + bi + cj +dk con a,b,c,d ∈;

Con e i ⋅ j ⋅ k = -1

**Osservazione**:

*H* è un campo non commutativo (cioè il prodotto non è commutativo). Un campo non commutativo è detto **corpo**.

**DEF.**

L’insieme dei quaternioni è indicato con *H*, se a = 0 q è detto quaternione immaginario puro.

La somma è definita come:

= ( - - - ) + ( + + - )i + ( - + + )j +

+ ( + + - )k

**Osservazione**:

**DEF.**

Il **modulo** di q ∈ *H* è ;

Il **coniugato** di q è

**Osservazione**:

**Osservazione**:

=

**Osservazione**:

q = a + bi + cj +dk ∈; posso scrivere q come:

q = (); con r = a ∈; (parte scalare) e = ∈; (parte vettoriale)

In tal caso:

= (+

= ( - <> ; + + ∧ )

**DEF.**

Siano ∈ immaginari cioè:

Quindi posso definire < > = < >; =

**Osservazione**:

Siano ∈ immaginari < > = =

= )

**Proposizione**:

q = ∈ immaginaro;

∀ ∈;se = ;

**Proposizione**:

Sia P p = xi + yj + zk ∈;

L’immagine di P rispetto alla rotazione di angolo rispetto all’asse con vettore direttore

= con

Si ottiene da con

q = cos

**Osservazione**:

Se l = 1 e m = n = 0

q = cos